UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
CENTRO UNIVERSITARIO DE OCCIDENTE – CUNOC –
DEPARTAMENTO DE POSTGRADO

PROYECTO DE FORMACIÓN E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN AMBIENTAL A NIVEL SUPERIOR

LA MATEMÁTICA Y SU CONTRIBUCIÓN A LA PROTECCIÓN DEL AMBIENTE

Ensayo presentado al Consejo Académico como trabajo de graduación por el Maestrante

LUIS ENRIQUE SOLÓRZANO LOAIZA

Carné 1007165

Previo a conferírsele el grado académico de

Maestro en Arte en Educación con Orientación en Medio Ambiente

Tutor

M Sc. Ever Manolo Sánchez de León

Nueva Guatemala de la Asunción, octubre del 2012

<u>Contenido</u>

"Sin matemáticas no se penetra hasta el fondo de la filosofía; sin filosofía no se llega al fondo de las matemáticas; sin las dos no se ve el fondo de nada."
Jean-Baptiste Bordas-Desmoulin (1798-1859)

La Matemática y su Contribución a la Protección del Ambiente

Resumen

En el documento que se pone a disposición del lector se busca hacer evidente de manera explícita, el papel preponderante que tiene la matemática en el estudio, desarrollo y protección del medio ambiente. Se pretende, en una primera parte, a partir de la historia de esta ciencia, poner de manifiesto que la matemática surge, precisamente, como un recurso humano para resolver sus problemas, muchos de ellos con fuerte componente ambiental. En una segunda parte, se exploran, sin agotar, varias de las formas en las que la matemática, por medio de los modelos matemáticos, no sólo son la base para otras ciencias, sino que ella misma contribuye a resolver problemas de carácter ambiental. Una comprensión de la matemática desde esta óptica puede contribuir decididamente a darle una concepción más humana, con mayores posibilidades de su aprendizaje, para que, en fin, pueda verse como otro producto más del incesante desarrollo del ser humano en la búsqueda por alcanzar niveles superiores de felicidad. Pero comprendiendo también, que en ese fin, el respeto al ambiente natural y social es parte consustancial a esa felicidad anhelada.

Abstract

In the document available to the reader is looking to make explicitly clear the role that mathematics plays in study, development and environmental protection. It seeks, in the first part, from the history of

science, to show that mathematics arose precisely as a human resource to solve their problems, many with strong environmental component. In the second part, we explore, without exhausting, several of the ways in which mathematics through mathematical models, not only are the foundation for other sciences, but itself contributes to solving problems of environmental nature. An understanding of mathematics from this perspective may contribute decisively to give mathematics a conception more human with greater possibilities of their learning, which in the end can be seen as another product of incessant development of human being in the quest to achieve higher levels of happiness. But comprising too, in that order, respect for the natural and social environment is an inseparable part to such longed happiness.

1. Introducción

El tema del medio ambiente, con frecuencia es analizado desde las perspectivas que le ofrecen las distintas disciplinas que la abordan. Según Giannuzzo (2010), desde la visión de la química y la ingeniería, el término “medio ambiente” alude a los componentes abióticos agua, suelo, aire. Desde la óptica de las ciencias sociales y humanas, el vocablo hace referencia a ciertas condiciones externas a un fenómeno bajo estudio. La biología y la ecología aceptan el término como la descripción de las condiciones bióticas y abióticas en las que vive un organismo, población o comunidad (conjunto de influencias desde el exterior). La ecología humana, considera el concepto como el conjunto de parámetros externos que, directa o indirectamente y a corto plazo, pueden tener influencia en la calidad de vida del hombre.

El derecho lo estudia como el resultado de la interrelación de los subsistemas naturales, económicos y sociales (Sisto, 1999, citado por Giannuzzo, 2010).

También la economía y la economía ecológica hacen referencia al medio ambiente como entorno o medio, incluso como subsistema, dentro de la interrelación de los sistemas naturales y sociales.

En otros ámbitos, y también en los mencionados, el ambiente se homologa al concepto de naturaleza.

Todavía más, en otros documentos, como en la Enciclopedia de Ciencias y Tecnologías en Argentina (Solivares, 2012), se le relaciona con el concepto de Tecnósfera[1] para describir el ambiente artificial creado por medio de las tecnologías por un grupo humano para el desarrollo de sus actividades y la satisfacción de sus necesidades básicas y deseos. Ambiente que modifica a su vez, la cultura de ese grupo. Es la esfera de las invenciones y de la cultura humana que desde esa intención, interactúa con la naturaleza.

Por otro lado, Martín, Peña y Rodríguez (s/f), destacan el carácter general que posee el contenido de la matemática pura y su amplia gama de aplicación a otras ciencias, lo cual ha sido un hecho histórico que se hace cada vez más evidente. Sin

[1] O Tecnosfera, como también se le conoce.

embargo, pese a ello, la matemática no figura de manera explícita como una disciplina que forme parte de aquellas que contribuyen al estudio y protección del medio ambiente.

Son, más bien, opiniones de expertos las que ubican a la disciplina como una ciencia que contribuye de manera decidida al estudio y mejoramiento del medio ambiente. El Dr. Eleuterio Toro (http://www.ing.unitn.it, 2008), especialista en matemática aplicada, destacó en la conferencia inaugural del VI Encuentro de Modelos Físicos y Matemáticos en Ingeniería, realizado en la Universidad de Santiago de Chile, USACH, en 2007, la importancia que tiene el desarrollo del medio ambiente como ciencia, con el aporte de la matemática:

> El medio ambiente es un proceso complejo que requiere de una gran cantidad de especialistas de distintas áreas, hay geógrafos, físicos etc., pero creo que el matemático ocupa un lugar central. En el estudio de estos procesos, las matemáticas son las herramientas para modelar dichos procesos, se trabaja con ecuaciones diferenciales que resultan ser muy importantes… El problema -dice- es que a veces hay fronteras ficticias entre las distintas disciplinas, por ejemplo, el físico o el ingeniero hidráulico no se entienden con el matemático, aparentemente tienen un lenguaje distinto y no trabajan juntos, pero todos los procesos están ligados con el clima y el medio ambiente. (Toro, 2007, citado por Noticias Universia, 2007).

También se expresan en la misma dirección los expertos Juan Grau y Digo Andina. Ambos son investigadores de la Universidad Politécnica de Madrid. El primero de ellos realiza un trabajo matemático que posibilita en la actualidad el descubrimiento de propiedades del suelo, las plantas, los mares y el Universo, o el desarrollo de un sistema para gestionar de forma objetiva y óptima los recursos hídricos nacionales y supranacionales. Andina, por su parte, ha contribuido a desarrollar un sistema basado en modelos matemáticos que analiza en tiempo real la contaminación atmosférica y permite predecir posibles contingencias ambientales, de manera que las autoridades puedan tomar medidas (Muerza, 2010).

¿Por qué, entonces, no es visible la matemática en el estudio del medio ambiente?

Meza (1998), afirma que existen tres razones fundamentales para aprender matemática: la matemática tiene un fin práctico, un fin formativo y un fin instrumental.

Un fin práctico para poder realizar cálculos que ayudan a resolver problemas de la vida cotidiana del individuo. Precisamente, resulta adecuado señalar que, mucho de la producción matemática, especialmente en sus albores, surge como la necesidad de contar con procedimientos para la resolución de problemas de nuestro entorno, muy especialmente problemas de tipo ambiental. La historia de la matemática (una parte sustancial de análisis posterior en este documento), está llena de situaciones problemáticas que fueron resueltas con el uso de la matemática en su función práctica, aun cuando en más de una oportunidad, los procedimientos no fueran los correctos.

El fin formativo se encuentra en la formación y fortalecimiento de las estructuras mentales de la persona, en la posibilidad de cultivar su capacidad de razonamiento. Con el estudio de la matemática se desarrolla la imaginación, se ejercita el poder de generalización y abstracción, se logra dominar el simbolismo, ganar precisión en el uso del lenguaje, así como exactitud y claridad en la expresión de conceptos y razonamientos. No puede negarse que una persona con mayor capacidad de análisis y razonamiento será una mejor persona, tendrá más altas posibilidades de entender su entorno social y natural (su medio ambiente), su problemática y, por tanto, involucrarse con más posibilidades de éxito en la búsqueda de su solución.

El fin instrumental de la matemática se aprecia en el enorme servicio que le presta a otras disciplinas. Cualquier campo científico requerirá del lenguaje de la matemática para desarrollarse. Bria y sus colaboradores (2009), recogen las palabras de Galileo Galilei cuando afirmaba:

> …la filosofía está escrita en ese grandísimo libro que continuamente está abierto ante nuestros ojos (digo: el universo), pero no puede entenderse si antes no se procura entender su lengua y conocer los caracteres en que está escrito. Este libro está escrito en lengua matemática, y sus caracteres son

> triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es totalmente imposible entender humanamente una palabra y sin las cuales nos agitamos vanamente en un oscuro laberinto. (p. 235).

A este fin obedece, probablemente, que la matemática no sea vista, de manera explícita, como una ciencia que contribuye al estudio del medio ambiente. Porque en la medida en que se encuentre en la base de las otras ciencias, implícitamente lo estará en cualquier estudio científico. Y es probable que esa situación oculte su aporte y sólo sea visible el de la ciencia a la cual soporta.

Pero ¿no puede resultar, acaso, estimulante y motivador en el aprendizaje de las matemáticas[2], conocer más explícitamente su papel en el desarrollo de las ciencias ambientales?, o conocer ¿cómo contribuye al cuidado del medio ambiente? Esto es especialmente importante para los docentes de matemáticas y para aquellas personas (padres de familia, por ejemplo), que de alguna manera se encuentran involucrados en el proceso de aprendizaje de esta rama del conocimiento. Porque, en la medida en que esta disciplina sea vista en su más amplia perspectiva, como la hermana mayor de todas las demás ciencias y tan antigua como la filosofía misma, su imagen de disciplina "complicada" y "aburrida", fría y calculadora se irá perdiendo. Emergerá, entonces su verdadera imagen, más humana y cercana al entendimiento del individuo.

Este es el objetivo del presente documento. Contribuir a divulgar ese carácter de la matemática, utilizando para ello, su enorme aporte al desarrollo del estudio del medio ambiente y la contribución a su preservación, todo lo cual redundará en la sobrevivencia del planeta que habitamos, que compartimos con otras especies. El logro de ese objetivo permitirá el disfrute de una mejor vida para los actuales huéspedes de la Tierra, pero también permitirá el disfrute de la misma "casa" para las futuras generaciones

[2] Aunque como afirman Fernández, Mamut y Arralde (2009), los términos "Matemática" y "Matemáticas" señalan la misma cosa, en este documento se utilizará "Matemática" para referirse a la disciplina pura, y "Matemáticas" cuando se hable en contextos educativos.

2. Breve historia de la matemática

La matemática es una ciencia. Como tal es parte del desarrollo cultural de la humanidad. *Difícilmente habrá otra ciencia que pierda más que la matemática si se prescinde de su historia* (Wussing, 1989, p.4). Y si pierde la matemática, perderán todas las otras ciencias. Es recomendable, por tanto, recoger algunos elementos breves pero relevantes de su historia, especialmente de aquellos pasajes que muestran que desde sus albores se vinculó con el medio ambiente.

María Teresa González, del departamento de matemática aplicada (Biomatemática), de la Universidad Complutense de Madrid cita en su documento *Matemáticas, ECTS y Biología, formación o información*, el asombro de Albert Einstein cuando afirmaba*: "¿Cómo explicar que las matemáticas, un producto de la mente humana, independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente bien a los objetos de la realidad?"* (González, 2007, p.4).

En efecto, resulta sorprendente ese hecho. Sin embargo, no se debe olvidar que, como bien lo dijo Einstein, la matemática es un producto de la mente humana, por lo que, al igual que cualquier manifestación cultural, surgió de la necesidad de satisfacer algún problema humano. Y aunque en la actualidad, la matemática, en su más alto desarrollo, alcance elevados niveles de abstracción, en sus orígenes atendió las necesidades más primitivas de su creador, en gran medida, necesidades surgidas de problemas ambientales.

De acuerdo con lo que expone el Ministerio de Educación de España en su página de Internet "Recursos del Colegio", los primeros indicios del aparecimiento de la matemática se remontan hasta un período comprendido entre los 35,000 y los 20,000 años, antes de cristo. Se trata de los restos de huesos de animales, encontrados en África, en los que aparecieron marcas con los que, aparentemente hacían recuentos para predecir ciclos lunares. (http://ares.cnice.mec.es, s/f).

También Wussing (1989) se ubica en esa postura. Afirma que en su continua lucha con la naturaleza que le rodeaba, el hombre primitivo obtuvo sus primeros conocimientos matemáticos y astronómicos. Los arqueólogos han encontrado armas, vasijas de barro, tejidos, etc. que muestran una acabada decoración de tipo geométrico. Investigaciones realizadas en tribus primitivas que todavía existen en la actualidad, aportan suficientes elementos para creer que desde entonces los antecesores del hombre actual ya poseían los primeros elementos de los sistemas numéricos y de un calendario.

Resulta a la par sorprendente, que entre los primeros usos de la matemática ya se vieran aplicaciones a aspectos ambientales como es el estudio astronómico, probablemente para una aplicación agrícola, aun cuando tales estudios, en su momento, estuvieran matizados por creencias mágicas de los fenómenos que estudiaban, como su atribución a dioses inexistentes.

El papiro de Rhind, junto con el papiro de Moscú son los documentos que mejor describen el alto desarrollo alcanzado por los antiguos egipcios. Particularmente el papiro de Rhind data del año 1650 antes de Cristo, pero se cree que la información que contiene se podría fechar en el año 3000 a.C. El documento inicia con la frase *Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios* (Pulpón, s/f). Los historiadores identifican a un personaje llamado Ahmes, como el escriba que, se supone, transcribió los problemas que ahí se plantean.

Los egipcios usaron la aritmética para menesteres muy prácticos. Muchos de sus problemas son del tipo: *Cómo un número de panes se pueden dividir en partes iguales entre un número de personas*. De acuerdo con la opinión de historiadores de la matemática, todo apunta a que la intencionalidad de los documentos citados estaba en la línea educativa, fue básicamente destinado a la enseñanza de contabilidad a los funcionarios del estado, y no es para nada una obra de conocimientos matemáticos.

No aparece explícitamente el valor de π, pero se deduce de la fórmula que utilizaron para determinar el área de un círculo: $A=\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ donde d es el diámetro del círculo.

$$A=\left(\frac{8}{9}d\right)^2=\frac{64}{81}(2r)^2=\frac{64}{81}4r^2=\frac{256}{81}r^2$$

Del valor anterior se deduce que $\pi = \frac{256}{81} \approx 3.16$ lo cual representa un error de un uno por ciento respecto del valor que se le asigna en la actualidad. Ese valor de π era utilizado en la medición de terrenos como en la construcción de edificios.

En el Antiguo Imperio Egipcio, usaron un sistema numérico de base 10 aunque era aditivo y no posicional. No usaron el cero.

Herodoto describió a los egipcios como los padres de la Geometría. También, gracias a sus monumentos y sus papiros sabemos hoy que, además, disponían de un sistema de numeración adicional que les permitía trabajar con fracciones de una forma muy especial ya que el numerador siempre era la unidad. (Roger, 1988).

En su tesis doctoral, Adoración Peña (2010), cita a Peña (2000), cuando, menciona a Proclo, un historiador griego del siglo V de nuestra era, que da a conocer los orígenes de la geometría en Egipto:

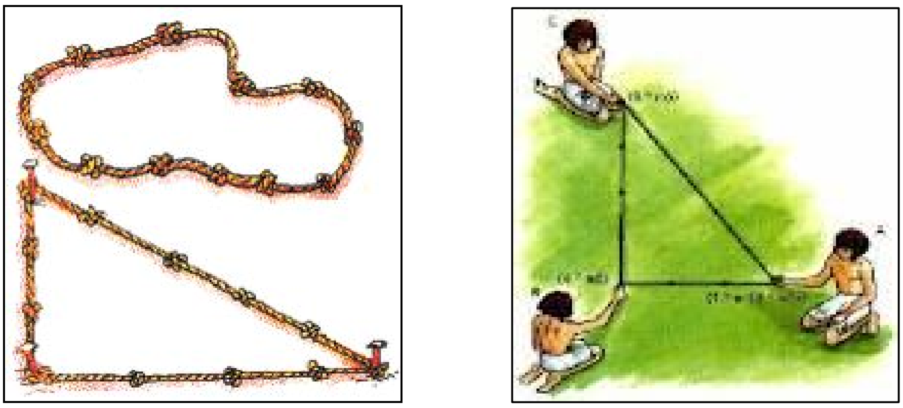
> …de acuerdo con la mayoría de las versiones, la Geometría fue primeramente descubierta en Egipto, teniendo su origen en la medición de áreas, ya que ésta era una necesidad para los egipcios, debido a que el Nilo, al desbordarse, barría con las señales que indicaban los límites de los terrenos de cada cual. Y por tanto, no es sorprendente que el descubrimiento de la Geometría y otras ciencias tuvieran su origen en las necesidades prácticas, viéndose que todas las cosas se encuentran en el camino que progresa de lo imperfecto a lo perfecto. Por tanto, la transición de la mera sensación al razonamiento y de éste al entendimiento no es más que una cosa natural. Y así como la Aritmética tuvo su origen entre los fenicios, debido a su uso en el comercio y las transacciones, la Geometría fue descubierta en Egipto por las razones antes expuestas (p. 26).

De nuevo puede apreciarse cómo desde los inicios de la humanidad, la matemática estaba a las órdenes de los seres humanos en la búsqueda de solución de sus problemas ambientales, en particular, en este caso, en la medición de terrenos como resultado de un fenómeno natural que era recurrente: la inundación del río Nilo.

Los conocimientos desarrollados por los egipcios en el campo de la geometría fueron muy diversos. Gracias a ello pudieron construir los templos de sus emperadores y las aún famosas pirámides. Miguel Pérez, en su obra *Una historia de las matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes* (2004), refiere que aparentemente tenían la noción del concepto del Teorema de Pitágoras antes del siglo III a. C. en el que fue demostrado: *Un triángulo es rectángulo sí y sólo si el área del cuadrado construido sobre su hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos*.

Los llamados *anudadores* eran los encargados de medir distancias con cuerdas en las que con anterioridad habían hecho nudos a distancias fijas e iguales. Por la experiencia habían llegado al conocimiento de que uniendo los extremos de tales cuerdas formando un triangulo que tuviera tres, cuatro y cinco nudos en cada lado, obtendrían un triángulo rectángulo. Esto les permitía trazar rectas perpendiculares que indicaban direcciones, tales como las del mástil sobre la cubierta en los barcos o la de los linderos en las particiones de terrenos. (Ver Figura 1)

Figura 1. Uso de cuerdas para calcular ángulos rectos (Ruiz, 2001).



La Mesopotamia[3] antigua también alcanzó alto desarrollo en la geometría. En Babilonia[4] tuvo un marcado origen práctico. Al tiempo que calculaban áreas de los

[3] Mesopotamia (del griego: Μεσοποταμία, meso-potamía, “entre ríos”, traducción del antiguo persa Miyanrudan, “la tierra entre ríos”, o del arameo beth nahrin, ‘entre dos ríos’) es el nombre por el cual se conoce a la zona del

campos sembrados, también hacían cálculos de los rendimientos totales de los terrenos como función de la calidad de suelo. Realizaron cálculos para determinar inclinaciones del terreno, anchura de la corona del terraplén, el número de trabajadores por jornada media de trabajo, etc. Los cálculos incluían también aplicaciones de ingeniería como construcción de tabiques con forma de anillo, cimientos de templos, pozos de ladrillo y canales (Wussing, 1989), sin dejar de mencionar que, gracias al alto desarrollo de su arquitectura, construyeron una de las siete maravillas del mundo antiguo: Los Jardines Colgantes.

La trigonometría tuvo sus orígenes en tierras egipcias, pero igualmente se desarrolló en Babilonia. Un problema esencial en la construcción de las pirámides egipcias era el de mantener la pendiente uniforme en cada una de las caras, y a su vez la misma en las 4 caras. Quizás esta necesidad es lo que llevó a los egipcios a emplear lo que denominaron "seqt", equivalente a lo que hoy conocemos por pendiente de una superficie plana inclinada lo que les llevaría al concepto de tangente.

Junto a lo anterior, las mediciones de terrenos dieron pie a la formación de las primeras tablas de razones trigonométricas. Establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Sus primeras aplicaciones se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, o una distancia que no podía ser medida de forma directa.

Aunque el concepto de funciones trigonométricas ha sido atribuido a los griegos, en realidad los egipcios ya conocían la relación entre la hora del día y la longitud de la sombra que proyecta una escala vertical. La regla que da la hora del día en función de la longitud de la sombra es un precursor de las funciones tangente y cotangente que estudiamos actualmente (Moreno y Restrepo, 2001).

Al empirismo de los egipcios y babilonios siguió el método deductivo de los griegos. Tales de Mileto (630 - 545 a. C), fue un comerciante exitoso, nacido en

---

Oriente Próximo ubicada entre los ríos Tigris y Éufrates, si bien se extiende a las zonas fértiles contiguas a la franja entre los dos ríos, y que coincide aproximadamente con las áreas no desérticas del actual Irak. El término alude principalmente a esta zona en la Edad Antigua.

[4] Actualmente sus ruinas se ubican en la provincia iraquí de Babil, a 110 km. al sur de Bagdad.

Mileto, en la costa de Jonia (Asia menor) que, luego de acumular fortuna en esa profesión se dedicó al estudio de la matemática. Como los jonios mantenían tráfico comercial con Egipto y Babilonia, es probable que Tales visitara el primero de estos lugares durante el reinado del faraón Amasis, en donde se supone que fue educado por ancianos sacerdotes de esa región (Wikipedia, s/f). De esa experiencia se deduce que aprovechó el conocimiento empírico de los egipcios y puso los cimientos de lo que posteriormente fue la geometría deductiva, inmortalizada después por Euclides en su libro Elementos.

Alsina, Fortuny y Pérez (1997), destacan, precisamente que, es a partir de Tales, y entre los siglos VI y III a.C., que en la civilización mediterránea se da el paso del empirismo al carácter científico en la geometría.

De acuerdo con Peña (2010), Pitágoras (que muchos historiadores lo vinculan como discípulo de Tales y aconsejado por éste para que tomara contacto con los ancianos, sus antiguos maestros en Egipto), *colocó la piedra angular de la Geometría científica al demostrar que las diversas leyes arbitrarias e inconexas de la Geometría empírica se pueden deducir como conclusiones lógicas de un número limitado de axiomas o postulados*. (p. 31).

Es difícil encontrar en toda la historia de la matemática objetos que hayan llamado tanto la atención del ser humano como las curvas planas identificadas como secciones cónicas.

A medida que transcurre el tiempo, es más admirable el esfuerzo desatado por varios personajes que se enfrentaron a la tarea de describir y teorizar alrededor de tales curvas. Baste decir que, aunque hoy estamos rodeados de escenarios y objetos que se pueden ver como representaciones modélicas de tales curvas, su aparición obedeció a la capacidad de abstracción de la menta humana urgida de resolver un problema ambiental de la época.

Por el año 433 a. C. una peste se desató en Grecia que diezmó su población en una cuarta parte. Consultado el oráculo acerca de cómo contrarrestar la epidemia, la respuesta fue que debía duplicarse el altar cúbico dedicado a Apolo, a fin de obtener más ofrenda. Pese a los esfuerzos denodados de los atenienses por cumplir con el pedido, la peste no cesó. Los trabajadores no comprendían por qué el altar se había ocho veces más grande a medida que se duplicaba su arista.

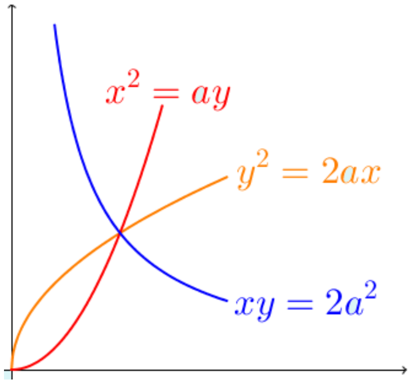
Hipócrates de Quío (vivió aproximadamente entre 470 y el 410 a. C.) realizó el primer progreso real en el problema de la duplicación del cubo cuando realizó la reducción que lleva su nombre. Esta se basaba en la construcción de medias proporcionales entre dos segmentos de líneas dadas de longitud a y 2a.

Aproximadamente en el año 350 a.C. nació Menecmo, en Alopeconnesus (actualmente en Turquía), miembro de la Academia platónica, discípulo de Eudoxo y maestro de Aristóteles. A él se le atribuye la introducción de las secciones cónicas. Las curvas planas que posteriormente se les conoció como parábola, elipse e hipérbola. Gracias a ese aporte, esas curvas fueron conocidas como la Tríada de Menecmo. Él se ocupó del problema clásico de la duplicación del cubo sobre el que ya había avanzado Hipócrates. Sus logros en la solución del problema lo llevaron hasta reducirlo a una expresión que en nuestros días podría escribirse de la siguiente forma: $\frac{2}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{1}$. En general, es el problema de las dos medias proporcionales entre *a* y 2*a* y que consiste en hallar *x* e *y*, tales que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$, y tiene por solución la intersección de la curva $x^2 = ay$ con $xy^2 = 2a^2$ de donde surge lo que ahora llamamos parábola o hipérbola equilátera.

Figura 2

Curvas cónicas parábola o

hipérbola equilátera



Producción propia

Aunque de fundamental importancia para el desarrollo de la matemática, lo es menos en esta oportunidad, destacar que todos esos resultados empíricos y sistematizados por los matemáticos griegos fueron recogidos por Euclides en el ya citado libro Elementos.

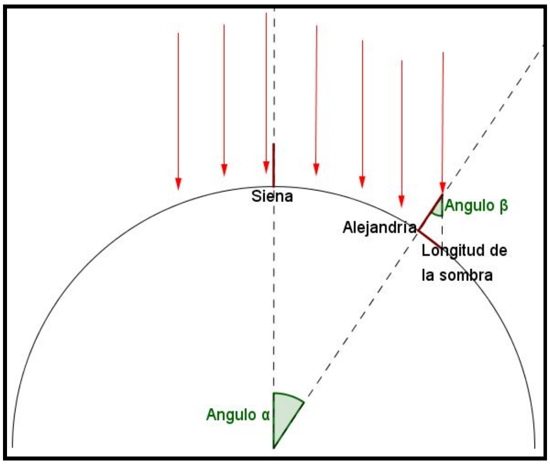
Sí es pertinente, en cambio, mencionar un hecho científico importante por el carácter ambiental que le reviste: la medición de la circunferencia de la Tierra por Eratóstenes (Cirene, 276 a. C. - Alejandría, 194 a. C), en el siglo III a. C., cuando la humanidad ni siquiera contaba con el telescopio.

Eratóstenes se preguntaba ¿cómo era posible que de dos palos sembrados verticalmente en lugares tan distantes como Alejandría y Siena, uno de ellos proyectara sombra y otro no, a la misma hora del mismo día (21 de junio, solsticio de verano)? La única respuesta racional era que la superficie de la Tierra debiera ser curva. Por consiguiente, en su análisis, debiera poderse calcular su circunferencia. Su experimento, de lo más ingenioso, partió de la hipótesis de que los rayos del sol caen perpendicularmente sobre la superficie terrestre (algo que no es así, pero que, considerando la distancia entre ambos cuerpos celestes, puede asumirse como verdadero con un error muy pequeño). Midió la longitud de la sombra del palo que sí la generaba y la comparó con la longitud de ese mismo palo. Haciendo uso de la razón tangente determinó el ángulo entre un rayo de sol y el palo que generaba sombra. Eratóstenes conocía el resultado que expresa que los ángulos alternos internos entre paralelas tienen la misma medida. Dedujo que las líneas imaginarias que contenían a los palos sembrados debieran intersecarse en el centro de la tierra formando un ángulo de igual medida que el ángulo entre un rayo de sol y el palo que generaba sombra; la medida de ese ángulo resultó ser un poco más de siete grados aproximadamente. Esa medida representa más o menos la cincuentava parte de los trescientos sesenta grados de una circunferencia, y por lo tanto de la circunferencia de la Tierra.

Para conocer la distancia entre los dos palos sembrados entre Alejandría y Siena contrató a una persona que, a pie, hizo la medición, misma que ahora, traducida a medidas actuales, se calcula en 800 kilómetros. 50 veces 800 kilómetros es igual la 40000 kilómetros, ese es el dato obtenido por Eratóstenes (Sagan, 2006). El dato actual es de 40009.152 kilómetros medido en los polos o meridianos (40076 kilómetros en el ecuador). Considerando esférica a la Tierra (es un elipsoide con muy baja excentricidad), se puede decir que el error de Eratóstenes en su cálculo es del orden de menos del uno por ciento.

Aristarco de Samos (310 a.C.-260 a.C.), ya hablaba de una Teoría heliocéntrica y siglos antes que él, Tales ya había estudiado el fenómeno de los eclipses, así como los pitagóricos ya reconocían la esfericidad de la Tierra (Massa, 2007). Pese a ello o, quizás por ello, no deja de ser es sorprendente el espíritu investigador de Eratóstenes para confirmar resultados y descubrir nuevos.

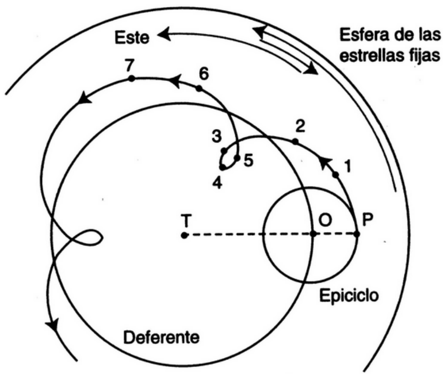
Figura 3: Esquema del experimento de Eratóstenes para la medición de la circunferencia de la Tierra



Amerita mencionar a Claudio Ptolomeo, matemático y astrónomo (Egipto 85-165 d.C.), que, con el auspicio de la iglesia católica, justificó un universo basado en el sistema geocéntrico descrito por Aristóteles. Según esta visión la Tierra permanece fija y es el centro de esferas en las que se encuentran el sol, la luna, las estrellas y los otros planetas. Las observaciones que parecían ser contradictorias en el modelo las explicó usando movimientos circulares denominados epiciclos[5] (Ver figura 3). Una vez descrito el modelo, que permaneció inamovible por casi mil años, Ptolomeo pasó a describir las matemáticas que necesitaba, en el resto de la obra (Gómez, S/A).

Figura 4: Epiciclos en el modelo de C. Ptolomeo

[5] El modelo explica cómo el planeta se movía en una órbita circular (epiciclo) cuyo centro se movía, a su vez, en otra órbita, también circular alrededor de la Tierra que era el centro de todo el sistema. Con esta combinación de movimientos se explicaba, con alguna aproximación, los movimientos retrógrados y estacionarios de los planetas. Con el paso del tiempo y la mejora en la calidad de las observaciones, fue necesario ir añadiendo cada vez más círculos al modelo para explicar los nuevos datos; haciéndolo impracticable.
El modelo queda bellamente descrito en la película de Alejandro Amenábar, "Agora" que es una especie de biografía de la matemática astrónoma Hipatia de Alejandría.



Como no se trata de escribir un tratado de la historia de la matemática, vamos a hacer un salto histórico para mencionar a Nicolás Copérnico y Johan Kepler, ambos precursores del modelo heliocéntrico, de una época más reciente.

Copérnico (1473-1543) nació en Polonia. Aunque seguramente escribió más de lo que se le conoce, lo que ha llegado oficialmente a ser reconocido es su obra titulada De Revolutionibus Orbium Celestium en la que propone un universo heliocéntrico. Con la misma alteraría el paradigma con el que se enfrentaban los problemas astronómicos de la época y cambiaría la visión aristotélica que había prevalecido a la fecha. No obstante, parece ser que previamente habría escrito un documento titulado de manera abreviada Comentariolus, que no fue firmado ni fechado por su autor, pero que sirvió de base para el posterior De Revolutionibus. En el contenido de Comentariolus se pueden leer los postulados que inauguran la astronomía heliocéntrica moderna. Juan Luis García (2008) los describe así:

1. No existe un centro único de todos los círculos o esferas celestes.
2. El centro de la Tierra no es el centro del Universo, sino sólo de la gravedad y de la esfera de la Luna.
3. Todas las esferas giran alrededor del Sol y por lo cual es el centro del Mundo.
4. ... la distancia de la Tierra al Sol es imperceptible en comparación con la distancia del firmamento.

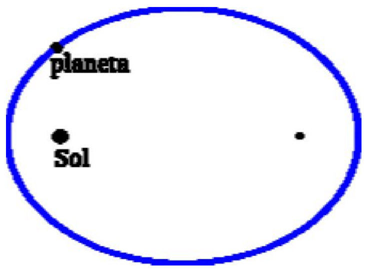
5. Cualquier movimiento que pueda aparecer en el firmamento, no se debe a ningún movimiento de este, sino al movimiento de la Tierra alrededor de sus polos fijos en un movimiento diario.
6. Los que se nos aparecen como movimientos del Sol no se deben a él mismo, sino que están ocasionados por el de la Tierra y nuestra esfera, con la que giramos alrededor del Sol como cualquier otro planeta, y así, la Tierra tiene varios movimientos.
7. Los movimientos observados en los planetas, de retrogradación (*los epiciclos de Ptolomeo*) o directos, tampoco provienen de sus movimientos sino del de la Tierra y éste basta por sí solo para explicar las aparentes irregularidades que en el cielo se observan.

El fundamento matemático de la obra, aunque se le acreditó a Copérnico, en realidad pertenece a Rhetico (nombre latinizado que adoptó Georg Joachim von Lauchen, que nació en 1514 en la región de Retia, el Tirol austriaco), joven colaborador de Copérnico que se entusiasmó con la obra del astrónomo y se prestó a colaborar con él en su empeño por cambiar la visión de la astronomía. (García, J, 2008).

Kepler (1571-1630) nació en Weil, una localidad de Alemania. Pese a la gran influencia religiosa que tuvo desde su permanencia en un seminario, aceptó de buen grado las ideas copernicanas. Luego de trasladarse a Praga por persecuciones religiosas, se convirtió en ayudante de Tycho Brahe, célebre astrónomo de la época. A la muerte de Brahe, a Kepler le nombraron matemático de la corte y con los datos que Brahe recopiló se dedicó a explicar el movimiento de los cuerpos celestes (Collete, 2003 a). La influencia religiosa sobre Kepler le condicionó a considerar el círculo como el modelo para representar el movimiento de los planetas alrededor del sol. Se desilusionó, después de que durante tres años de estudio, los datos de Brahe no coincidían con el modelo circular, por lo que debió abandonar la idea pese a que la diferencia entre la orbita circular y la real sólo podía distinguirse con mediciones muy precisas. De esa cuenta, explicó por medio de secciones cónicas[6] el movimiento planetario y llegó a formular sus tres leyes:

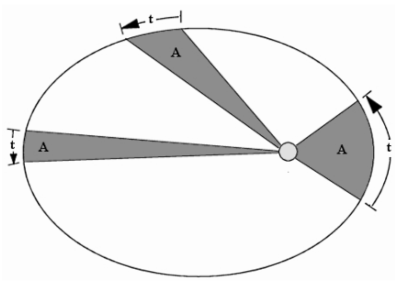
- Primera ley (1609): todos los planetas se desplazan alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas. El Sol está en uno de los focos de la elipse.

Figura 5. Primera Ley de Kepler



- Segunda ley (1609): el radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

Figura 6. Segunda Ley de Kepler



- Tercera ley (1618): para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.

  $\frac{T^2}{L^3} = K : \text{ constante}$, donde, T es el periodo orbital (tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol), L la distancia media del planeta con el Sol y K la constante de proporcionalidad.

Estas leyes se aplican a otros cuerpos astronómicos que se encuentran en mutua influencia gravitatoria, como el sistema formado por la Tierra y la Luna.

Con este aporte, Kepler daba un primer sustento matemático a la visión del universo conocido en la época, libre de toda influencia religiosa. (Sagan, 2006)

[6] En la ya mencionada película "Agora" se sugiere que Hipatia, en el sigo V de nuestra era, ya había especulado sobre la posibilidad de que el movimiento de los cuerpos celestes tuvieran una trayectoria elíptica alrededor del sol. Esta idea propuesta en el film ha sido controvertida entre los expertos (DivulgaMat, 2009). La película deja ver la influencia sobre Hipatia, de Aristarco de Samos (algo muy probable por cuanto tuvo acceso a la segunda gran biblioteca de Alejandría), que, en el siglo IV a.C., ya planteaba una teoría heliocéntrica.

Finalmente, aunque no se agote exhaustivamente la recopilación histórica, es pertinente mencionar a dos insignes matemáticos, el inglés Isaac Newton y el alemán Gotfried Wilhelm Leibniz, ambos creadores del cálculo diferencial e integral, simultáneamente y con enfoques distintos. El primero con una visión más física y el segundo con una perspectiva más matemática. (Collete, 2003 b). No se puede colocar a ninguno de los dos por delante del otro en el orden de la creación. No obstante esta salvedad, ellos mismos y sus discípulos fueron protagonistas de una agria disputa por apropiarse de dicho honor y el diferendo se extendió por muchos años, incluso a nivel de gobiernos.

Es muy importante mencionarlos porque su creación es la base del estudio de las ecuaciones diferenciales, elemento fundamental con el que en la actualidad se formulan los distintos modelos matemáticos que contribuyen a la protección del medio ambiente.

3. La matemática y el medio ambiente

3.1. Las ciencias naturales y sociales, y la matemática

Para nadie resulta ser un secreto que la física es la disciplina natural más matematizada. Es decir, las matemáticas funcionan con mucho éxito en la física, probablemente más que en cualquier otra rama del conocimiento físico. Esto pareciera ser un contrasentido en sí mismo. ¿Cómo puede ser que la matemática, reputada como la ciencia de la exactitud y de la abstracción por excelencia, resulte tan exitosa en una aplicación, de suyo, concreta y con una carga importante de error como fuente de conocimiento?

La respuesta no es simple, pero tampoco difícil de entender. Henri Poincaré[7] (citado por Ruiz, 2010), se refiere al tema en los siguientes términos:

> "Todas las leyes se extraen de la experiencia, pero para enunciarlas se precisa de una lengua especial; el lenguaje ordinario es demasiado pobre, y es además demasiado vago, para expresar

[7] Nacido en Francia en 1854, fue un reconocido matemático, científico teórico y filósofo de la ciencia, considerado a menudo como el último «universalista» (después de Gauss) capaz de entender y contribuir en todos los ámbitos de la disciplina matemática.

> relaciones tan delicadas, tan ricas y tan precisas. Esta es la razón por la que el físico no puede prescindir de las matemáticas; éstas le proporcionan la única lengua en la que puede hablar”

Isaac Newton se dio cuenta de que sin matemáticas no podría estudiar física con reales posibilidades de conocerla a profundidad. Se vio en la necesidad de desarrollar el cálculo infinitesimal, apropiado a su objetivo. La matematización de la física permitió dar pasos a su formalización. Pero la influencia de la matemática no se quedó ahí. Visto que el instrumental algorítmico y de estructura lógica que le proporcionaba la matemática le daba un carácter más formal, dio un paso más allá y utilizó su metodología: el método axiomático.

Euclides institucionalizó el método axiomático como la herramienta para la construcción del discurso matemático (aunque no fue el primero en utilizar el método para la demostración de teoremas, de hecho, Thales y Pitágoras ya lo usaban antes que él). Wilder (1969), refiere a Aristóteles en los siguientes términos:

> Toda ciencia demostrativa tiene que partir de principios indemostrables; de otro modo, los pasos de la demostración serían infinitos. De estos principios indemostrables algunos son (a) comunes a todas las ciencias, otros son (b) particulares o peculiares a una ciencia particular. (pag, 36)

Los primeros son los axiomas y los segundos son los postulados, aunque es necesario aclarar que, actualmente, los matemáticos no establecen ninguna diferencia entre tales proposiciones. Partiendo de ambos y de las adecuadas definiciones se demuestran en una cadena lógica, teoremas que describen las propiedades de los objetos que son estudiados por la disciplina que se está formalizando.

La geometría fue la primera de las disciplinas matemáticas que se construyó sobre la base del método axiomático.

Pues bien, en el afán de contar con una física sólidamente construida, esta ciencia se empoderó del método axiomático y hoy podemos constatar la existencia de una física totalmente formal, una física teórica que puede presumir de una construcción formalizada.

Sólo para ejemplificar, podemos mencionar dos postulados de la teoría de la relatividad especial:

1. La velocidad de la luz es constante e independiente del movimiento relativo entre la fuente de luz y el observador.
2. No existen el espacio y el tiempo absolutos: dependen de la posición y velocidad del observador.

Y dos teoremas de la física:

1. Teorema de Norton: cualquier circuito lineal se puede sustituir por una fuente equivalente de intensidad en paralelo con una impedancia equivalente.
2. Teorema del Trabajo y la Energía: El trabajo efectuado por la fuerza neta sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de la partícula: $W=\Delta K=K_2-K_1$.

Otras ciencias naturales como la química o la biología han emulado a la física y han intentado formalizar su discurso.

Las ciencias sociales también han recorrido este camino. Sólo por mencionar el caso de la economía dos postulados de Keynes (1986) de economía clásica son los siguientes:

1. El salario es igual al producto marginal del trabajo.
2. La utilidad del salario, cuando se usa determinado volumen de trabajo, es igual a la desutilidad marginal de ese mismo volumen de trabajo.

Y dos teoremas de la economía moderna son:

1. Ante presencia de determinadas externalidades siempre será posible la consecución de una externalidad óptima (lo cual no implica necesariamente la desaparición total de la misma) y de un máximo nivel de bienestar. Esto se logrará a través de la negociación. Para ello es necesario que los derechos de propiedad de las distintas partes estén bien asignados y pueden defenderse. Otra condición es que el sistema de precios funcione sin costes y no existan efectos renta, en el marco del equilibrio general (Miró, 2002. P. 1).
2. El teorema Modigliani-Miller (llamado así por Franco Modigliani y Merton Miller) es parte esencial del pensamiento académico moderno sobre la

estructura de capital de la empresa. El teorema afirma que el valor de una compañía no se ve afectado por la forma en que ésta es financiada en ausencia de impuestos, costes de quiebra y asimetrías en la información de los agentes (Wikipedia, 2012).

Bien es sabido que el ambiente es todo el entorno del ser humano que lo afecta, por lo tanto, la influencia de la matemática se extiende a muchas de las esferas del ambiente, en este caso, dotándolas de algo tan suyo como lo es su metodología.

3.2. Medio ambiente y desarrollo sostenible

Todo lo que afecta al ser vivo puede se considerado como parte de su medio ambiente. En virtud de ello, va a condicionar las circunstancias de vida de las personas o de la sociedad en las que se desarrolla. El Dr. Juan Antonio González (2012) de la Universidad de Granada, hace eco de la definición de Medio Ambiente que formulara las Naciones Unidas en la Conferencia sobre este concepto, en Estocolmo, en 1972: *El medio ambiente es el conjunto de componentes físicos, químicos, biológicos y sociales capaces de causar efectos directos o indirectos, en un plazo corto o largo, sobre los seres vivos y las actividades humanas.* (p. 1). De acuerdo con esa definición, el concepto abarca todo el conjunto de valores naturales, sociales y culturales existentes en un lugar y en un momento determinados, que influyen en la vida del ser humano actual y en las generaciones futuras. Por lo tanto, no se trata sólo del espacio en el que se desarrolla la vida, sino que también comprende seres vivos, objetos, agua, suelo, aire y las relaciones entre ellos, así como elementos tan intangibles como la cultura.

Así pues, todo aquel fenómeno social o natural que modifique el funcionamiento de cualquiera de los componentes que menciona la definición, afectará al medio ambiente, en un sentido positivo o negativo.

Ejemplos de los ambientes que condicionan el medio, en el que se desarrollan los seres humanos, también los proporciona González:

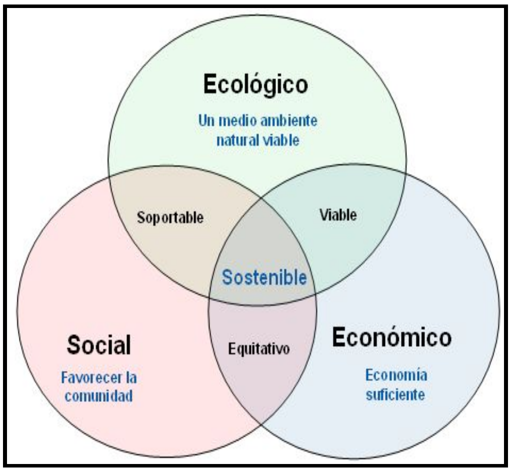
- Ambiente físico: paisaje, litología, edafología, elementos del clima, contaminación.

- Ambiente biológico: demografía humana, flora, fauna, agua.
- Ambiente socio-económico: tipos y condiciones de trabajo, urbanización, desarrollo económico, política, migraciones, marginaciones, desastres naturales, guerras… (p.1)

Ligado al concepto de Medio Ambiente, está el de Desarrollo Sostenible que se asumió a partir del Principio 3º de la Declaración de Río (1992) en las siguientes palabras: *Es el desarrollo que satisface las necesidades de las generaciones presentes sin comprometer la capacidad de las generaciones futuras, para satisfacer sus propias necesidades*. (Ramírez, Sánchez y García, 2004, p. 55).

Se puede afirmar que el compromiso de proteger el medio ambiente y promover un desarrollo sostenible es de todos los habitantes de la Tierra, pero, muy especialmente le corresponde a los científicos (de las ciencias sociales, exactas y naturales), incluidos en esa categoría los docentes de cualquier disciplina, quienes deben poner en práctica todos sus conocimientos científicos para abonar en la búsqueda de una vida mejor, en el presente, pero también para las generaciones venideras.

Figura 7: Esquema de los tres pilares del desarrollo sostenible (Grupo Gallus, 2010)



3.3. Matemática y problemas ambientales

La matemática, como ciencia exacta, más cercana a la filosofía que otras, puede verse como ubicada en el trasfondo de todas aquellas que aparecen en un primer plano en el estudio del medio ambiente y el desarrollo sostenible: biología, física, química, ecología, economía, educación, sociología y un largo etc. No obstante ello, es conveniente identificar el aporte de la matemática en el estudio y conservación del medio ambiente para que cada vez más personas la valoren en su justa dimensión.

Conviene iniciar con el concepto de modelo. Un modelo es una representación de la realidad que es más representativa entre más variables de la realidad incorpore. (Ver Figura 8).

Figura 8

El modelo a escala en la figura 8a es una representación de la realidad que se observa en la figura 8b. (Vaferman, 2010)

Figura 8a

Figura 8b

Un modelo matemático es, probablemente, la herramienta más eficaz con que la matemática contribuye como parte de las ciencias ambientales. Para su manejo eficiente es necesario el conocimiento y comprensión del concepto. Un modelo matemático se forma a partir de procesos empíricos y teóricos. Ambos están estrechamente relacionados. Generalmente el inicio de formulación se encuentra en el proceso empírico que significa la toma de mediciones de un cierto fenómeno observable. A las mediciones se le incorporan elementos teóricos conocidos con anterioridad. Ese conjunto de mediciones en un marco teórico permite provocar una generalización del fenómeno. Conforme se van haciendo nuevas mediciones, las generalizaciones se modifican o, inclusive se establecen nuevas. Ese proceso de generalización, en el que se logra detectar un patrón es lo que conduce a la formulación de un modelo.

De acuerdo con Chapra y Canale (2005),

> Un modelo matemático se define, de manera general, como una formulación o una ecuación (*o conjunto de ecuaciones*) que expresa las características esenciales de un sistema físico o de un proceso, en términos matemáticos. En general, el modelo se representa mediante una relación funcional de la forma:
>
> $$\text{Variable dependiente} = f\left(\begin{matrix} Variables \\ independientes \end{matrix}, parámetros, \begin{matrix} funciones \\ de\ fuerza \end{matrix}\right)$$
>
> donde la *variable dependiente* es una característica que generalmente refleja el comportamiento o estado de un sistema; las *variables independientes* son, por lo común, dimensiones tales como tiempo y espacio, a través de los cuales se determina el comportamiento del sistema; los *parámetros* son reflejo de las propiedades o la composición del sistema; y las *funciones de fuerza* son influencias externas que actúan sobre el sistema (p. 12).

La expresión funcional expresada va desde una simple relación algebraica hasta un enorme y complicado grupo de ecuaciones diferenciales.

3.4. Matemática y clima

El clima es un sistema complejo de la naturaleza por lo que su comportamiento es difícil de predecir. Por una parte hay tendencias a largo plazo debidas, normalmente, a variaciones sistemáticas como la de la concentración de los gases de efecto invernadero, la de la radiación solar o los cambios orbitales. Por otra parte, existen fluctuaciones más o menos caóticas[8] (sin ningún patrón definido), debidas a la interacción entre forzamientos, retroalimentaciones y moderadores (Wikipedia, S/A).

[8] Un sistema que experimenta un movimiento caótico nunca se repite a sí mismo, sino que más bien se comporta de forma continuamente diferente (Franco, 2000)

Los siguientes párrafos son un resumen de la conferencia dictada por el Dr. Jesús Ildefonso Díaz (2004), durante la inauguración de la Sexta edición del Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica, organizado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España.

La interacción entre Climatología y Matemáticas no es reciente. En 1738, la Academia Francesa de Ciencias en un concurso académico propuso un tema que versaba sobre la causa del flujo y reflujo del mar. Los premiados en esa oportunidad fueron Daniel Bernoulli, Leonard Euler y C. MacLaurin. Más tarde Joseph Fourier fijó su atención, no ya en la predicción a corto plazo de tiempo, sino en las variaciones de clima a más larga escala de tiempo: decenas de años, siglos e incluso miles de años.

La predicción a corto plazo requiere disponer de una información que pueda expresarse en cantidades numéricas, lo más precisas posible, de cada una de las variables climáticas: temperaturas terrestres y marinas a diferentes alturas y profundidades, dirección e intensidades de las velocidades, isobaras de los fluidos que nos rodean, propiedades químicas de sus componentes (salinidad, concentraciones de gases), etc. Son los modelos denominados genéricamente de Circulación General. La posibilidad de predicción del tiempo, con todas sus posibles limitaciones, es uno de los más importantes resultados de la Matemática, en la que se conjugan ramas de esta disciplina como son el Análisis Numérico y la Computación.

J. von Neumann (28 de diciembre de 1903 - 8 de febrero de 1957) fue un matemático húngaro-estadounidense que realizó contribuciones fundamentales en física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, ciencias de la computación, economía, análisis numérico, cibernética, hidrodinámica, estadística y en muchos otros campos. Está considerado como uno de los más importantes matemáticos de la historia moderna. Este personaje está ligado a los resultados mencionados anteriormente: el 31 de enero de 1949 su potente ordenador ENIAC fue capaz de pronosticar, con 24 horas de antelación, una gran tormenta sobre el noroeste de Estados Unidos, lo que constituyó un hito en la historia de la Meteorología (y de la matemática aplicada). (Pelkowsky, 2000).

De todas formas las técnicas del Análisis Numérico y de la Computación, aún con toda su capacidad de aporte en esta línea, se quedarían cortas sin la existencia de un modelo continuo que formule las leyes físicas que rigen el comportamiento de las variables climáticas. En realidad, no es sino hasta hace pocos años que los científicos han llegado a la conclusión de que tales modelos apenas están "moderadamente" bien planteados. Actualmente, no se sabe si las variables climáticas manifiestan un comportamiento único (la llamada unicidad de soluciones), una vez que se tienen los datos iniciales y de contorno, o si, contrariamente a ello, se pueden obtener distintos comportamientos.

A raíz de este estudio, es decir la dependencia continua de las variables climáticas respecto de sus condiciones iniciales, el meteorólogo E. N. Lorenz alcanzó la notoriedad con los trabajos realizados en 1960 que condujeron a la creación de lo que ahora llamamos Teoría del Caos Determinista de los sistemas dinámicos no lineales[9].

Esta interacción entre Matemáticas y clima se refiere al estudio de su comportamiento, cuando consideramos que el plazo considerado es muy largo (matemáticamente se habla de que el tiempo tiende a infinito), de las soluciones de un sistema dinámico no lineal. En el caso de la Meteorología, el sistema dinámico asociado tiene infinitos grados de libertad (estadísticamente hablando).

En el largo plazo, los modelos matemáticos en Climatología no pretenden el pronóstico exacto, sino buscan diagnósticos cualitativos. El astrónomo Milutin

[9] El término Caos se refiere a una interconexión subyacente que se manifiesta en acontecimientos aparentemente aleatorios.
En la turbulencia de un arroyo es imposible predecir la trayectoria precisa de una partícula de agua. Sin embargo, ese sistema es, a la vez, continuamente cambiante y siempre estable (siempre podremos predecir a dónde irá cualquiera de las gotas de agua que lo componen). Si tiramos una piedra al agua el sistema no se desestabilizará, cosa que sí ocurriría en un sistema no caótico.
Esto es una metáfora de nosotros mismos: somos la misma persona que hace diez años, a pesar de que hace diez años estábamos formados por unos átomos diferentes y psicológicamente también somos diferentes de aquél entonces.
¿Por qué un sistema caótico es tan cambiante? Porque todo esta influido por todo. Todo está interconectado con todo. Es la misma razón por la que el sistema es, a la vez, tan inestable.
Una de las anécdotas que intenta expresar esta teoría es la llamada Efecto mariposa: Tal como fuera descrito originalmente en la meteorología, suele expresarse en frases de la siguiente forma: "El aleteo de una mariposa que vuela en la China puede producir, un mes después, un huracán en Texas" (Cazau, 2002).
Aunque la Teoría del Caos nace del estudio de la predicción del clima, su aplicación se ha podido observar en disciplinas tan dispares como la Economía y la Biología.

Milankovitch (1879-1958) fue pionero en este campo. Fue el primero en formular una teoría climática de las glaciaciones del Pleistoceno calculando los elementos orbitales y los subsiguientes cambios en la insolación y en el clima.

La conjetura sobre la posibilidad de modificar el clima mediante posibles acciones humanas sobre el albedo terrestre[10] se debe a J. von Neumann, quien la formuló en 1956, pero no ha sido aún probada. Las normativas mundiales para gases de efecto invernadero que se acuerdan en cumbres como la de Kyoto pueden ser también entendidas como medidas de control introducidas por el hombre. La justificación matemática de esas posibles acciones y sus repercusiones sobre una realidad tan compleja son temas que se encuentran en la vanguardia de la investigación actual en Teoría de Control y Teoría de juegos: nichos importantes de la Matemática, tanto por su riqueza científica como por su gran aplicabilidad a muchas otras ciencias experimentales y sociales.

3.5. Matemática y la prevención de incendios forestales

> Un incendio forestal es un fuego violento que se desarrolla sin control en espacio abierto, afectando la superficie vegetal del mismo. Se clasifica genéricamente en función del combustible que facilite su avance y asegura su alimentación. (Viger, Navalón, Pastor, Planas y Zárate, 2003, pp. 33-34)

La Reserva de Biosfera, es una categoría reconocida internacionalmente, son áreas geográficas que representan los diferentes hábitats del planeta. Son seleccionadas por su interés científico, cuya función principal es conservar y proteger la biodiversidad, también persiguen el desarrollo económico y humano de la zonas.

La Reserva de Biosfera Maya -RBM- está reconocida por las Naciones Unidas UNESCO y bajo el Convenio para la Conservación de la Biodiversidad de América Central, como una de las áreas más importantes para la conservación de toda la región, contiene un área de bosque tropical entre las más grandes que aun quedan en Mesoamerica.

[10] La fracción de energía solar que la Tierra devuelve -sin aprovecharla- al espacio estelar.

Sin embargo la RBM, ha sido fuertemente amenazada en su mayoría por los incendios forestales.

Los años mas afectados por incendios forestales en Guatemala, según análisis y gráfica elaborado por Perfil Ambiental de Guatemala del 2006 (Gálvez y Tuy, 2006), fueron, en 1998 como resultado del “Fenómeno del Niño”. Fue el año mas afectado en superficie de área, sin embargo en el año 2003 no se alcanzaron las magnitudes del año 1998, pero afectaron más de 425,000 hectáreas y de estas el 95% se localizaron dentro de áreas protegidas (94% en la Reserva de Biosfera Maya).

Luis Zárate, en su disertación doctoral (2004), estudia los modelos matemáticos que permiten predecir el comportamiento de esos fenómenos y los posibles efectos en el entorno en el que se producen. Esa predicción proporciona valiosas herramientas para atacar, estimar y desplegar recursos, medidas de seguridad para el personal de extinción y para la población de la zona del siniestro. Por otro lado, facilita la toma de decisiones encaminadas a la minimización de los costos materiales y económicos.

Zarate resume, básicamente, el problema en dos posibilidades:

- La combustión (proceso de ignición, cinética de las reacciones, consumo de combustible, características de la llama, etc.).
- Los mecanismos de transferencia de calor involucrados (conducción, convección y radiación).

Posteriormente se formula matemáticamente el fenómeno, destacando sus características físicas esenciales, con el objetivo de ignorar aquellas que no lo son, de tal manera de simplificar el problema. Se obtiene un sistema de ecuaciones que debe ser resuelto, con lo cual se obtienen resultados numéricos. Éstos se comparan con datos experimentales para validarlos. Si se logran validar se acepta el modelo como una representación del problema. En caso contrario se revisa y se reformula el modelo, incluso tomando en consideración factores que habían sido desechados inicialmente. El proceso puede repetirse varias veces hasta obtener el modelo adecuado.

Los efectos térmicos de un incendio son debidos principalmente a la radiación. Los modelos matemáticos para la estimación del flujo de calor por este mecanismo se pueden clasificar en modelos diferenciales, integrales y semiempíricos.

- Los modelos diferenciales son modelos matemáticos basados en la resolución numérica de las ecuaciones de Navier–Stokes (en su forma de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales), complementados con submodelos. Describen el comportamiento de importantes procesos físicos y químicos ocurridos en el incendio (incluye las técnicas por ordenador para la mecánica de fluidos, CFD, Computational Fluid Dynamic). La no linealidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (que los componen) requiere de apropiados métodos de resolución, que a su vez se pueden dividir en los siguientes métodos: diferencias finitas, elementos finitos y de volumen finito. (p. 84).
- Los modelos integrales expresan, de manera muy semejante a los modelos diferenciales, la conservación de la masa, momento y energía. Sin embargo, las ecuaciones toman una forma más simple, de manera que (como sugiere su nombre) pueden ser integradas. Incorporan submodelos que describen los procesos más importantes ocurridos durante un incendio (fenómenos de turbulencia, combustión y transferencia de calor), aunque tales procesos pueden ser una simplificación de los modelos diferenciales.
- Los modelos semiempíricos, matemáticamente, son los modelos más simples, basados en correlaciones empíricas (obtenidas a partir de datos experimentales). Sus resultados son fiables, aunque tienen un rango de validez muy limitado (las condiciones específicas en que fueron efectuados los experimentos). Son considerados dentro de esta clasificación los modelos más conocidos en la

modelización de la radiación emitida por un incendio: (1) modelos de una fuente puntual y (2) el modelo del cuerpo sólido. (pp. 84-85).

3.6. Matemática y crecimiento poblacional

La dinámica de poblaciones es, en el campo de la ecología, uno de los temas de mayor importancia para el desarrollo temporal y espacial de los grupos de organismos de la misma especie que se desarrollan en distintos ambientes.

La Dra. María de los Ángeles Rodríguez, de la Universidad de Sevilla (2007), define el concepto de población en los siguientes términos: *Una población es un grupo de organismos de la misma especie, que habitan un lugar determinado, en el cual utilizan recursos y se reproducen. Este grupo de organismos está caracterizado por una serie de propiedades que les son propias* (p.04).

Los modelos poblacionales se basan en "leyes de crecimiento de la población", que son ecuaciones para la razón de cambio dP/dt de la población P por unidad de tiempo t. El modelo exponencial supone tasas de nacimientos y muertes (con relación al total de la población) constantes en el tiempo. En Zill y Cullen (2004) se encuentran los siguientes modelos demográficos con ecuaciones diferenciales.

1. El modelo exponencial de la forma $\frac{dP}{dt} = rP$ donde r es la tasa instantánea de crecimiento neto de la población y P es la población inicial en el instante de inicio de cuantificación en un cierto período *t.*
2. El modelo logístico $\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P}{k}\right)$ donde k representa la población máxima con los recursos limitados disponibles y P es la población inicial en el instante de inicio de cuantificación en un cierto período *t.* r_0 es la tasa de crecimiento que se supone proporcional a P y $(k - P)$.

El modelo exponencial supone que las tasas son determinadas de alguna manera por los mecanismos de reproducción, crecimiento y muerte de la población, los cuales se mantienen fijos en el tiempo. Es evidente que el modelo no puede ser indefinidamente válido. En el algún momento los recursos se agotarían llegando a su límite y eso pondría obstáculos al crecimiento de la población. Sin embargo, a corto plazo puede ser apropiado para ciertas poblaciones en condiciones especiales. En el caso de las poblaciones humanas, el crecimiento exponencial sólo se puede sostener por períodos largos siempre que los recursos crezcan proporcionalmente con el crecimiento de la población, por ejemplo mediante el desarrollo tecnológico. Aun así, cuando *t* es muy grande, el modelo no funcionaría pues el área geográfica de convivencia es limitada por lo que su crecimiento tendría un límite.

El modelo exponencial fue introducido por el economista Thomas Malthus (1776-1834), aunque ya Euler lo había mencionado, precisamente para argumentar cómo una población podía crecer rápidamente hasta agotar todos los recursos disponibles; luego de lo cual, Malthus concluyó que sobrevendría el caos, las enfermedades y guerras.

La alternativa al modelo exponencial lo formuló Verhulst (1804-1849), que propuso el modelo logístico. Cuando las poblaciones se vuelven tan numerosas que agotan los recursos o el territorio, las interacciones entre los individuos llevan a muertes, ya sea por luchas entre ellos o por la facilidad en la propagación de enfermedades. Al final se llega a un estado de equilibrio donde el crecimiento neto de la población es cero. (Quiñones y Lecompte, 2007).

Un modelo de población que es muy utilizado en biología y en ecología es el llamado Modelo Depredador-Presa. El modelo considera la interacción de dos especies cuyos tamaños de población en el tiempo *t* son $x(t)$ y $y(t)$. Aunque existen otros, para efectos de ilustración se discutirá superficialmente el modelo expresado en el sistema de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra.

Siguiendo a López y Blé (2008), las hipótesis del modelo son las siguientes:

1. La población crece proporcionalmente a su tamaño, es decir, tiene espacio y alimento suficientes. Si esto sucede y $x(t)$ representa la población presa (en ausencia del depredador), entonces el crecimiento de la población está dado por la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = ax, a > 0$, el modelo exponencial creciente, y su solución es la función exponencial $x(t) = x_0 e^{at}$. Esto significa que el número de presas, en ausencia de depredador crece exponencialmente.

2. El depredador $y(t)$ sólo se alimenta de la presa $x(t)$. Así, si no hay presas, su tamaño decae con una velocidad proporcional a su población esto es $\frac{dy}{dt} = -dy, d > 0$, el modelo exponencial creciente, y su solución es la función exponencial $y(t) = y_0 e^{-dt}$.Esto significa que el número de depredadores, en ausencia de presas decrece exponencialmente hasta extinguirse.
3. El número de encuentros entre el depredador y la presa es proporcional al producto de sus poblaciones. Además, en cada encuentro aumenta el número de depredadores y disminuye el número de las presas. Es decir, $cxy, c > 0$

   Por lo tanto, la presencia de la presa beneficia el crecimiento del depredador como $cxy, c > 0$ y la interacción entre ellas disminuye el crecimiento de la presa de la forma $-bxy, b > 0$

Dadas las hipótesis anteriores, entonces, un sistema de interacción entre depredadores y presas, viene dado por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

con $x > 0$, $y > 0$, a, b, c, d, números reales positivos. No es objeto de interés del documento, discutir la solución del sistema que puede investigarse en cualquier libro especializado, incluidos, los que se mencionan en la bibliografía.

Otras aplicaciones de la matemática como parte de las ciencias que estudian el medio ambiente o como parte de la solución de problemas del medio ambiente pueden verse en el uso de modelos matemáticos para la simulación y toma de decisiones en el caso de inundaciones, como ocurre en varias universidades de Argentina o Brasil. O en el estudio de los océanos en los que por medio de modelos matemáticos se han logrado optimizar los procedimientos de pesca o fabricación de embarcaciones (Cifuentes, Torres y Frías, 1995). O, como en el caso de Argentina, en donde resultados de aplicaciones de las matemáticas han sido incorporados a la Ley de Bosques y en la remediación de la contaminación (Muerza, 2010).

También hay investigaciones en la Universidad de Zaragoza y en la Universidad Complutense de Madrid que, con la aplicación de modelos matemáticos, indican que es posible hacer pronósticos sobre erupciones volcánicas y tomar medidas que mitiguen los efectos de tales fenómenos. (Castro, 2011).

Conviene destacar la información acerca del patrón entre el número de huracanes que se producen en una determinada zona del planeta y la energía que liberan, descubierto por académicos matemáticos. Aunque aún son incipientes los resultados, son alentadores en la línea de tomar las medidas mitigantes durante y posterior a la ocurrencia del evento. (Corral, 2010).

3.7. Matemática y Naturaleza

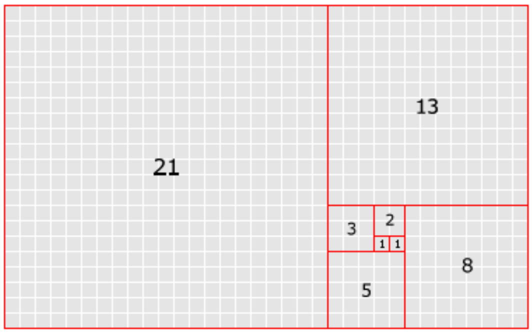
Es interesante, por lo sorprendente que resulta, la relación entre la matemática y la naturaleza. Cristóbal Vila (2010a), en un corto video ofrece una excelente expresión visual animada entre algunas formas geométricas que se pueden apreciar de la naturaleza y su relación matemática "aparentemente"[11] subyacente. Se hará mención únicamente de algunos elementos del video porque el intentar explicar todo el documento requeriría de más espacio que el disponible.

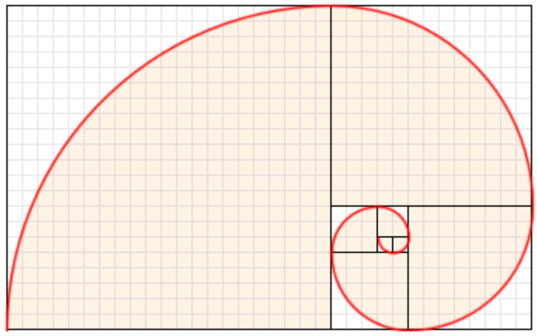
Inicia mostrando la sucesión de Fibonacci 0,1,1,2,3,5,8,13,21,… en la cual, cada valor, es la suma de los dos anteriores. Esta sucesión parece estar presente en varios fenómenos naturales. Por ejemplo, si se construyen cuadrados cuyos lados tengan por medida cada uno de los valores de dicha sucesión se tendrá la figura 8a. Si se trazan arcos con radio igual al lado de cada cuadrado, se genera una espiral, llamada Espiral de Fibonacci (también llamada espiral logarítmica), como se puede apreciar en la figura 9b.

Figura 9 (Vila, 2010b)

Figura 9a	Figura 9b
Rectángulo formado por cuadrados cuyos lados tienen medidas de Fibonacci	Espiral logarítmica o de Fibonacci

[11] El vocablo escrito entre comillas expresa la opinión del autor del ensayo en el sentido de no existen relaciones matemáticas subyacentes a una estructura natural. De ser así, se estaría aceptando que la matemática es un ente o categoría anterior al ser humano y a la naturaleza misma. Pero según mi opinión la matemática es producto del cerebro humano y por tanto no existió antes que él.



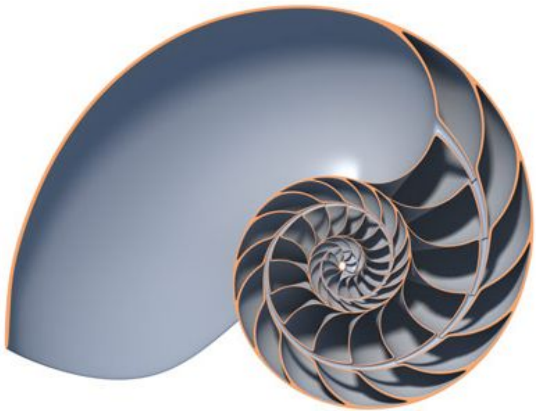


Esta figura geométrica es muy similar a la estructura del caracol Nautilus.

Figura 10 (Vila, 2010b)

Figura 10a
Concha del Nautilus
(Corte transversal simulado)

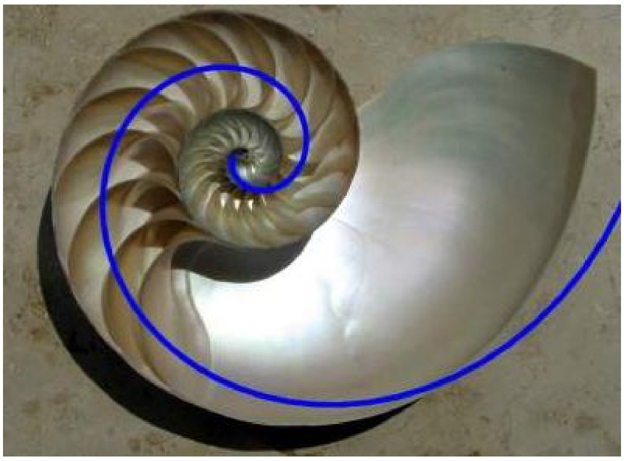
Figura 10b Concha del
Concha del Nautilus
(expresión real)



En realidad, no es exactamente igual, pese a que algunos científicos así lo afirmen. Y no puede ser, porque de serlo, todas las conchas Nautilus serían exactamente iguales, lo cual no es cierto. Es una prueba de que las relaciones matemáticas no son subyacentes a las estructuras de la naturaleza. Las figuras 9b y 10b parecen tener el mismo contorno, pero una vez que se sobreponen, según se aprecia en la figura 11, no es así. El científico Clifford Pickover, autor del video Belleza y las matemáticas (2007), afirma que las estructuras de la naturaleza adoptan estructuras parecidas a las matemáticas porque estas estructuras son eficientes y esa adopción les permite sobrevivir. Y Akkana Peck (2007a), indagó y obtuvo los datos de dos matemáticos (Clemente Falbo y John Sharp) que hicieron las comparaciones correspondientes. Ambos concluyeron que las proporciones de la concha de Nautilus no son las mismas que las de la Espiral de Fibonacci.

Figura 11

Concha Nautilus y espiral de Fibonacci en color azul



El video de Vila y la presentación de diapositivas de Akkana Peck (2007b), muestran otras expresiones de la naturaleza en las se pueden observar estructuras muy parecidas a las de la Espiral de Fibonacci. Algunas imágenes tomadas de estos sitios lo ilustran:

Figura 12

Figura 12a

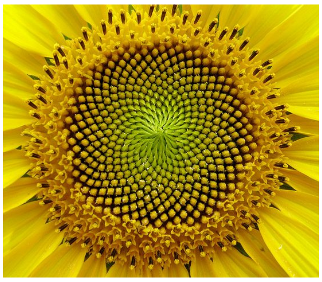


Figura 12b

Figura 12c

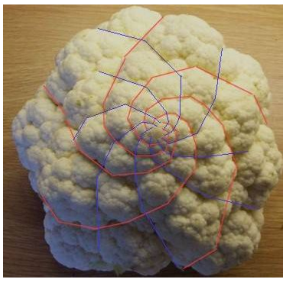


Figura 12d

Lo que no se puede negar es el asombro que provoca la capacidad del ser humano de crear modelos matemáticos que expliquen las relaciones que se encuentran en la estructura misma de la naturaleza, aunque, como todo modelo, no represente exactamente la realidad porque sólo es una representación de ella.

4. Conclusiones

4.1. Aunque todas las ciencias ambientales se nutren de la matemática, en realidad ésta no parece estar explícitamente presente en el estudio y desarrollo del medio ambiente.

4.2. La matemática es la disciplina de la abstracción por antonomasia. Su desarrollo en la actualidad la ha llevado a niveles a los que únicamente tienen acceso mentes privilegiadas, aunque, por supuesto, las currícula educativas incluyen contenidos de esta disciplina al alcance de la mayoría. Baste constatar algunas de las definiciones más reconocidas de la matemática (que valga decir, no tiene una definición oficial): Es el estudio riguroso de mundos hipotéticos. Es la ciencia de lo que podría haber sido o podría ser, así como de lo que es (Murray Gell-Mann12). Otra definición reza: En el fondo, matemática es el nombre que le damos a la colección de todas las pautas e interrelaciones posibles. Algunas de estas pautas son entre formas, otras en secuencias de números, en tanto que otras son relaciones más abstractas entre estructuras. La esencia de la matemática está en la relación entre cantidades y cualidades. Por lo tanto, su existencia no es un misterio; es inevitable. En cualquier universo en el que exista un orden de cualquier clase, y por lo tanto un Universo soporte de vida, debe haber pauta, y por lo tanto debe haber matemática (John D. Barrow13). Pero la definición más representativa de su abstracción es la siguiente: Sin embargo, a pesar de la obvia efectividad de las matemáticas en física, nunca he oído un buen argumento a priori que diga que el mundo deba estar organizado de acuerdo a principios matemáticos. [...] las verdades matemáticas y lógicas pueden ser

[12] Físico estadounidense que nació en Nueva York el 15 de septiembre de 1929. Estudió en la Universidad de Yale y en el Instituto Tecnológico de Massachusetts. Profesor desde 1955 en la Universidad de California (Pasadena), donde desempeñó desde 1967 la cátedra de Física Teórica. Fue miembro de la NASA desde 1964. Se le otorgó el Premio Nobel de Física en 1969 por sus descubrimientos sobre partículas elementales.

[13] Matemático, cosmólogo y divulgador científico británico, originario de Londres, nacido en 1952. Se doctoró en Oxford en 1977. Después colaboró con los departamentos de Física y Astrofísica de la Universidad de Oxford y de la de California en Berkeley. En 1999 pasó a ser catedrático de matemáticas y de física teórica en la Universidad de Cambridge. Ese mismo año obtuvo la Kelvin Medal de la Royal Glasgow Philosophical Society.

verdad para cualquier tiempo porque en realidad no son sobre nada que exista. Solo hablan de posibles relaciones. Por lo tanto, es un error –una clase de error categorial- imaginar que los teoremas de las matemáticas son sobre “otro” o “platónico” reino que existe fuera del tiempo. Los teoremas de las matemáticas están fuera del tiempo porque no son sobre nada real. Por el contrario, todo lo que existe debe existir dentro del tiempo (Lee Smolin14).

4.3. No obstante el nivel de abstracción que se le reconoce, la matemática tuvo sus orígenes más elementales en la solución de los problemas más cotidianos del ser humano. Probablemente, ninguna otra ciencia ha estado más vinculada al medio ambiente que ella.

4.4. La historia de la humanidad refleja la presencia de la matemática en períodos tan lejanos en el tiempo como 25,000 años antes de nuestra era. Desde entonces ha estado al servicio del hombre desde la planificación agrícola hasta la ingeniería y la arquitectura, pasando por las artes. Es decir, todo aquello que es cultura de la humanidad y, en consecuencia, un producto o factor medioambiental.

4.5. La matemática ha sido el basamento principal para fundamentar los paradigmas más importantes sobre el universo, desde posiciones tan encontradas como las teorías geocéntrica y heliocéntrica, como en la actualidad, la teoría de la relatividad.

4.6. Probablemente el campo más importante de la matemática para el desarrollo del medio ambiente es la Teoría de modelos. Por medio de modelos matemáticos, ha sido posible que otras ciencias expresen partes de la realidad de la naturaleza, de la sociedad y hasta del pensamiento (por ejemplo la computación) lo que ha permitido el avance en esos segmentos de la realidad.

[14] Nació en Nueva York, Estados Unidos, en1955. Es un físico teórico dedicado al estudio de la gravedad cuántica, la cosmología y la teoría cuántica.

Los modelos matemáticos basados en sistemas de ecuaciones diferenciales son la base de estudios para pronósticos meteorológicos. Son los llamados Modelos de Circulación General. En particular se conjugan con ramas como el Análisis Numérico y las Ciencias de la Computación.

4.7. Otra aplicación importante en el desarrollo del medio ambiente por medio de los modelos matemáticos basados en sistemas de ecuaciones diferenciales es el de la prevención de incendios forestales.

4.8. Probablemente la aplicación más antigua y mejor desarrollada de los modelos matemáticos en el estudio del medio ambiente está referida a la dinámica de poblaciones. Sin ser exhaustivos, los modelos exponencial, el logístico y el de Cazador-Presa, son los más conocidos.

4.9. Otras aplicaciones importantes de los modelos matemáticos se pueden encontrar en la simulación de escenarios para la prevención y toma decisiones mitigantes en posibles casos de inundación, en los pronósticos de erupciones volcánicas, o la captación de información sobre el número de huracanes que se pueden producir en una determinada zona del planeta y, la energía que podrían liberar.

4.10. En la comparación y homologación entre naturaleza y medio ambiente que se ha hecho en ciertos círculos, algunos científicos han pretendido encontrar una relación exacta entre algunos fenómenos o expresiones de la naturaleza con la matemática. Aunque, en efecto, provocan sorpresa algunas similitudes en esa línea, es importante destacar que, como en otros casos, las expresiones matemáticas con las que los relacionan son, en el mejor de los casos, sólo modelos de esos fenómenos o expresiones. Los modelos matemáticos, según las definiciones expuestas en la conclusión dos de este documento, no permiten concluir la presencia de relaciones subyacentes de ese tipo.

5. Recomendaciones

5.1. Cualquier esfuerzo por “humanizar” la matemática abonará a crear simpatía e inclinación a su aprendizaje. El abordaje de esta disciplina desde su perspectiva histórica puede ser una estrategia didáctica que permita la identificación con los seres humanos que permitieron su aparecimiento y en consecuencia, con el resultado de sus esfuerzos, más aún si se constata por este medio que ese surgimiento obedeció a la necesidad de resolver los problemas más apremiantes a los que se enfrentaba la humanidad en sus albores.

5.2. En la misma línea, el estudio de la matemática como objeto de aprendizaje que responda a los tres fines: a) práctico, b) formativo y c) instrumental, puede tener un mayor significado para quien la estudia si tiene la oportunidad de conocer el gran aporte que esta disciplina brinda a otras para su fortalecimiento.

5.3. Así mismo, puede resultar de mucho interés en su aprendizaje, descubrir todo el instrumental teórico y práctico que tiene la matemática para resolver muchos de los problemas de índole ambiental.

6. Bibliografía

1. Alsina, C; Fortuny, J; Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría?* (colección "Educación matemática en Secundaria" nº 5). Madrid, España. Editorial Síntesis.
2. Arnaldez, Roger. (1988). *Historia General de las Ciencias*. Barcelona: Ediciones Orbis S.A.
3. Bria, Ll; Doltra, M; Morene, E; Pedrals, J; Juan, J y Bodú, J. (2009). *Los libros de los Filósofos*. Barcelona. Editorial Ariel, S.A.
4. Castro, R. (2011). *Modelos matemáticos estudian y pronostican fenómenos como terremotos y volcanes*. En Aragón Investiga. Recuperado de http://www.aragoninvestiga.org/modelos-matematicos-permiten-estudiar-y-pronosticar-fenomenos-como-los-terremotos/ el 03 de enero de 2012.
5. Cazau, P. (2000). *La Teoría del Caos.* En Antroposmoderno. Recuperado en: http://www.antroposmoderno.com/antro-articulo.php?id_articulo=152 el 06 de Marzo de 2012.
6. Chapra, S; Canale, R. (2005). *Métodos numéricos para ingenieros*. (4ª Edición). México. D.F. Editorial McGraw-Hill Interamericana.
7. Cifuentes, J; Torres, P y Frías,M. (1995). *Las matemáticas y el estudio de los océanos*. Biblioteca Digital Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa. Recuperado en: http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/17/htm/sec_17.html el 03 de Marzo de 2012.
8. Clima. (S/A). En *Wikipedia*. Recuperado en: http://es.wikipedia.org/wiki/Clima el 06 de Marzo de 2012.
9. Collete, J. (2003 a). *Historia de las matemáticas I*. (6ª edición). México. Editorial Siglo XXI.
10. Collete, J. (2003 b). Historia de las matemáticas II. (6ª edición). México. Editorial Siglo XXI.
11. Corral, A. (2010). *Descubren un patrón sorprendentemente regular en la energía de los huracanes*. En UAB divulga. Revista de Divulgación

Científica. Recuperado de http://www.uab.es/servlet/Satellite?cid=1096481466568&pagename=UABDivulga%2FPage%2FTemplatePageDetallArticleInvestigar&param1=1279693035054 el 01 de abril de 2012.

12. Díaz, J. (2004). *Modelos matemáticos y Clima.* En Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. España. Recuperado en: http://www.antroposmoderno.com/antro-articulo.php?id_articulo=152 el 06 de Marzo de 2012.

13. DivulgaMat. (2009). *Los expertos critican el protagonismo de Hipatia de Alejandría en 'Ágora'.* En DivulgaMat, Recuperado en: http://www.divulgamat.net/ el 07 de noviembre de 2011.

14. Exponen sobre matemática aplicada al medio ambiente en la Universidad de Santiago. (2007). Recuperado de http://noticias.universia.cl/vida-universitaria/noticia/2007/11/21/316084/exponen-matematica-aplicada-medio-ambiente-universidad-santiago.html, el 3 de enero de 2012.

15. Fernández, E; Mamut, N y Arralde, Z. (2009). *¿Matemáticas o Matemáticas? ¿Indistintos o distintos?*. En Publicaciones Periódicas de la Universidad Nacional del Litoral. Recuperado de http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8180/publicaciones/bitstream/1/1754/4/AU_2006_8_pag_25_36.pdf, el 02 de febrero de 2012.

16. Franco, A. (2000). *Física con ordenador. Curso Interactivo de Física en Internet*. En Plataforma de Teleformación de la Intranet Educativa Municipal. Recuperado en: http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/teoria/A_Franco/default.htm el 25 de junio de 2008.

17. Gálvez, J; Tuy, H. (2006). *Perfil Ambiental de Guatemala, 2006.* Guatemala. Instituto de Agricultura, Recursos Naturales y Ambiente (IARNA) de la Universidad Rafael Landívar (URL) y la Asociación Instituto de Incidencia Ambiental (IIA).

18. Grupo Gallus. 2010. *¿La sostenibilidad puede contribuir a la reducción de los costes?.* En Gallus. Recuperado en: http://www.gallus-group.com/es/DesktopDefault.aspx/tabid-318/473_read-901 el 14 de mayo de 2012.

19. García, J. (2008). *Copérnico, Nicolás*. En Centro Virtual de divulgación de las matemáticas, divulgaMat. Recuperado de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3335%3Acopico-nicol1473-1543&catid=37%3Abiograf-de-matemcos-ilustres&directory=67&showall=1 el 14 de abril de 2011.

20. Giannuzzo, Amelia. (2010). *Los estudios sobre el ambiente y la ciencia ambiental*. SCIELO. *Num.* 8. http://dx.doi.org/10.1590/S1678-31662010000100006.

21. Gómez, J. (S/A). *Claudio Ptolomeo*. En mimosa.pntic.mec.es. Recuperado de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/ptolomeo.htm el 18 de febrero de 2012.

22. Gonzáles, J. (2012). El estudio del medio ambiente. En Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~educamel/documentos/estudio/apuntes.pdf el 5 de abril de 2012.

23. González, M. (2007). *Matemáticas, ECTS y Biología, formación o información*. Recuperado de http://www.ucm.es/centros/cont/descargas/documento3560.pdf el 27 de marzo de 2012.

24. Internet en el aula. (S/A). *Historia de las matemáticas*. Recuperado de http://ares.cnice.mec.es/matematicasep/colegio/historia.html el 13 de diciembre de 2011.

25. Keynes, J. (1986). *Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero*. México, D.F. Fondo de Cultura Económica.

26. Martín,N; Peña, A y M, Rodríguez. (S/A). *Matemática y Ciencia*. Recuperado de http://www.ucp.vc.rimed.cu/sitios/varela/articulos/rv0702.pdf, el 02 de abril de 2012.

27. Massa, M. (2007). *Aristarco de Samos*. En Centro Virtual de divulgación de las matemáticas, divulgaMat. Recuperado de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3321%3Aaristarco-de-samos-310-ac-260-ac&catid=37%3Abiograf-de-matemcos-ilustres&directory=67&showall=1 el 11 de agosto de 2010.

28. Meza, L. (1998). La pirámide de objetivos educativos y la enseñanza de la matemática en la educación secundaria. Costa Rica. Memorias del Primer Festival de Matemática. Instituto Tecnológico de Costa Rica.

29. Miró, P. (2002). *El Teorema de Coase y sus implicaciones según "El problema del Coste Social*. En Contribuciones a la economía de La Economía de Mercado, virtudes e inconvenientes. Recuperado de http://www.eumed.net/cursecon/colaboraciones/Miro-Coase.htm. el 21 de julio de 2012.

30. Moreno, V y Restrepo, M. (2001). *Nuevo Alfa 10*. Bogotá, Colombia. Editorial Norma.

31. Muerza, F. (2010). *Matemáticas para salvar el medio ambiente*. En Centro Virtual de divulgación de las matemáticas, divulgaMat. Recuperado de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10902:3-junio-2010-matematicas-para-salvar-el-medio-ambiente&catid=217:aplicaciones-matemcas-actuales&directory=67 el 241 de marzo de 2012.

32. Pelkowsky, J. (2000). *50 años de predicción numérica del tiempo: impresiones de un simposio conmemorativo.* En Facultad de Ciencias, Universidad de Colombia. Recuperado en: http://www.geociencias.unal.edu.co/unciencias/web/dependencia/index.php el 16 de marzo de 2012.

33. Peña, A. (2010). Enseñanza de la geometría con TIC en educación secundaria obligatoria. (Disertación Doctoral). Recuperada de http://e-spacio.uned.es/fez/eserv.php?pid=tesisuned:Educacion-Apena&dsID=Documento1.pdf el 23 de julio de 2011.

34. Peck, A. (2007a). *The Fibonacci Spiral and the Nautilus*. En Akkana's Musings on Open Source, Sciencia, and nature. Recuperado de http://shallowsky.com/blog/science/fibonautilus.html el 01 de abril de 2012.

35. Peck, A. (2007b). *The Rabbit, The Nautilus and the Pine Cone*. En shallowsky. Recuperado de http://shallowsky.com/talks/fibonacci/title.html el 01 de abril de 2012.

36. Pickover, C. (2007). *Belleza y las matemáticas*. En Youtube. Recuperado de http://www.youtube.com/watch?v=foBuoZwa9Xs el 01 de abril de 2012.

37. Pérez, M. (2004). *Una historia de las matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes*. Madrid, España. Editorial Visión Libros.

38. Professor Eleuterio F. Toro, (2008). Recuperado de http://www.ing.unitn.it/~toroe/index.php?page=main el 3 de abril de 2012.

39. Pulpón, A. (S/A). *Historia del Papiro de Rhind y similares*. Recuperado de http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/165/el_papiro_de_Rhind.pd el 20 de septiembre de 2010.

40. Quiñones, J; Lecompte, A. (2007). *Modelos exponencial y logístico de la población en el Suroeste de Puerto Rico*. Revista de educación 360 en ciencias y matemática Núm. I,3. Recuperado en: http://cremc.ponce.inter.edu/3raedicion/articulo4.htm el 17 de enero de 2012.

41. Ramírez, A; Sánchez, J; García, A (2004). *El Desarrollo Sustentable: Interpretación y Análisis*. En Revista del Centro de Investigación. Universidad La Salle. Vol. 6, Pp. 55-59, Distrito Federal, México. Recuperado en: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/342/34202107.pdf el 06 de Marzo de 2008.

42. Rodríguez, M. (2007). *Modelos Matemáticos de Poblaciones.* En Departamento de Ecuaciones Diferenciales, Universidad de Sevilla. Recuperado en: http://personal.us.es/angeles/Actual/mmcs/tema1.pdf 2007 el 11 de febrero de 2012.

43. Ruiz, S. (2010). *Las matemáticas y la física.* En La Bella Teoría. Recuperado en: http://labellateoria.blogspot.com/2010/01/las-matematicas-y-la-fisica.html, el 15 de marzo de 2012.

44. Ruiz, J. 2001. *Perímetros y áreas. Un poco de historia*. En Eskola 2.0. Recuperado en: http://www.eskola20.org/sd/eso/mat/perimetro_area/modulos/es/content_1_1.html, el 18 de agosto de 2012.

45. Sagan, C. (2006). *Cosmos*. (24ª edición). Barcelona, España. Editorial Planeta.

46. Solivares, C. (2012). *Tecnósfera*. En *La enciclopedia de ciencias y tecnologías en Argentina*. Recuperado de http://cyt-ar.com.ar/cyt-ar/index.php/P%C3%A1gina_principal, el 3 de abril de 2012.

47. Tales de Mileto. (S/F). En Wikipedia. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Mileto el 23 de octubre de 2011.

48. Vaferman. 2010. *Autos a escala. Volkswagen escarabajo.* En el blog de Vaferman. Recuperado de http://vaferman.blogspot.com/2010/08/volkswagen-escarabajo.html el 08 de agosto de 2012.

49. Viger, J; Navalón, X; Pastor, E; Planas, E; Zárate, L. (2003). *Manual de ingeniería básica para la prevención y extinción de incendios forestales.* Barcelona, España. Ediciones Mundi-Prensa.

50. Vila, C. (2010a). *Nature by Numbers*. En Etereaestudios. Recuperado de http://www.etereaestudios.com/docs_html/nbyn_htm/nbyn_mov_youtube.htm el 02 de abril de 2012.

51. Vila, C. (2010b). *Nature by Numbers. La teoría detrás de la película*. En Etereaestudios. Recuperado de http://www.etereaestudios.com/docs_html/nbyn_htm/about_index.htm el 02 de abril de 2012.

52. Wikipedia (2012). *Teorema de Modigliani-Miller*. En Wikipedia. Recuperado de http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Modigliani-Miller el 21 de julio de 2012.

53. Wilder, R. (1969). El método axiomático. En Newman, J (Ed). Sigma. El mundo de las matemáticas. Barcelona, España. Editorial Grijalbo, S.A.

54. Wussing, H. (1989). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. (2ª Edición). Madrid, España. Siglo XXI de España Editores S.A.

55. Zárate, L. (2004). *Estudio de las características físicas y geométricas de la llama en los incendios forestales. Modelos matemáticos de los incendios forestales. Cap.4.* (Disertación Doctoral). En Tesis Doctorales en Red. Recuperado en: http://www.tesisenred.net/bitstream/handle/10803/6436/06CAPITULO4.PDF?sequence=6 el 04 de Marzo de 2012.

56. Zill,D; Cullen, M. (2004). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. (5ª Edición). México, D.F. Editorial Thomson-Learning.